無限次元非推移的Lie群 (Global Analysis)

木曽, 和啓

数理解析研究所講究録
291巻 1977年 31-45

無限次元非推移的Lie群

京大　理学部　木曽和啓

無限次元Lie群は、推移的な場合には、Singer-Sternberg [4]をはじめとしていろいろな研究があり、単純群やprimitiveな群の分類もなされている。また、非推移的な場合には、最近森本[3]によって、ある種のformal algebraが決定された。ここでは、非推移的Lie群に対する構造方程式や、単純群の分類に関係した問題などを考察する。

§1.　M、Nを(C^∞-)多様体、$\rho: M \to N$を(C^∞-)写像とする。ρが上への写像で、またそのrankが各点でNの次元に等しい時、$\rho: M \to N$をfibered manifoldという。XがM上のベクトル場のとき、$j_x^k(X)$でXの$x \in M$におけるk階のjetを表わす。また、$J_k(TM)$でMの接バンドルのk階のjet bundleを表わす。

Mを多様体、$\mathcal{L}$をM上のL.A.S.(Lie algebra sheaf)とする。即ち、$\mathcal{L}$はM上のベクトル場からなるsheafで、

bracket で閉じているものである。

$$R_k = \bigcup_{x \in M} \{ j^k_x(X) \mid X \in \mathcal{L}_x \} \subset J_k(TM)$$

とおく。ここで、$\mathcal{L}_x$ は x 上の stalk。

<u>定義 1</u>　次の条件が成り立つ時、$\mathcal{L}$ を C.L.A.S. (continuous L.A.S.) という。

(1)　fibered manifold $p: M \longrightarrow N$ が存在して、

$R_0 = \{ X \in TM \mid p_* X = 0 \}$ が成り立つ。

(2)　$\forall k$ について R_k は M 上の vector bundle。

(3)　次の条件をみたす自然数 k_0 が存在する：M 上の (local) ベクトル場 X は、$j^{k_0}_x(X) \in R_{k_0}$ が任意の x についてなりたつ時 $\mathcal{L}$ の section である。

M を複素多様体、$\mathcal{L}$ を M 上の正則ベクトル場からなるＬＡＳとする。複素解析的な範囲で考えた定義１の各条件がなりたつ時、$\mathcal{L}$ を複素解析的ＬＡＳと呼ぶ。

$\mathcal{L}$ をＣＬＡＳとする。推移的な場合、つまり N が一点のときには、$\mathcal{L}$ は適当な G 構造の無限小変換からなるＬＡＳとみることができる。非推移的な場合にも同じように議論するためには、G-構造という概念を拡張する必要がある。そのような構造は Tanaka によって定義され、すでに同型問題が解かれている。([6] 参照)　まず、それについて述べる。

$p: M \longrightarrow N$ を fibered manifold、$m = \dim M$、$n = \dim N$

としよう。$V=\mathbb{R}^m$. また V の n 次元部分空間 W をとり固定する。$\pi : F(M) \longrightarrow M$ を M の frame bundle とする。よく知られているように、M の変換 φ は $F(M)$ の変換 $\tilde{\varphi}$ を誘導する。即ち、$p \in F(M)$、$v \in V$ のとき、$\tilde{\varphi}(p)(v) = \varphi_* p(v)$。同様にして、$M$ 上のベクトル場 X は $F(M)$ 上に持ち上げることができる。それを $\tilde{X}$ で表わす。また、$A \in gl(V)$ に対して、$GL(V)$ の右作用から導かれる $F(M)$ 上のベクトル場を A^* で表わす。

次のように定義する。

$$F(M, N) = \{ p \in F(M) \mid p(W) = R_{o, \pi(p)} \}$$

$$GL(V, W) = \{ a \in GL(V) \mid a(W) = W \}$$

$$GL(V, W)^{\#} = \{ a \in GL(V, W) \mid a(v) \equiv v \mod W,\ v \in V \}$$

$GL(V, W)$ は $F(M, N)$ の構造群で、また、$GL(V, W)^{\#}$ の Lie 環は $W \otimes V^*$ に等しい。容易に分るように、上の linear isotropy algebra は、適当な同一視のもとで $W \otimes V^*$ の subalgebra である。

$(W \otimes V^*) \times N$ を N 上の自明な vector bundle とみて、$\mathfrak{T}$ をその subbundle とする。$t \in N$ 上の fiber を $\mathfrak{T}(t)$ で表わす。各 $t \in N$ に対して、$\mathfrak{T}(t)$ が Lie 環の時、$\mathfrak{T}$ を $W \otimes V^*$ の N-subalgebra と呼ぶ。

<u>定義 2</u>　$\mathfrak{T}$ を $W \otimes V^*$ の N-subalgebra とする。$F(M, N)$ の部分多様体 P が次の条件をみたすとき、P を $\mathfrak{T}$-structure

という。

(1) $\pi : P \longrightarrow M$ は fibered manifold。

(2) $A \in \mathfrak{gl}(V,W)$, $p \in P$ のとき、A_p^* が P に接する事と $A \in \mathfrak{g}(t)$ は同値である。ここで、$t = \rho(\pi(p))$。

P を $\mathfrak{g}$-structure とする。$\rho(\pi(p)) = \rho(\pi(q))$ であるような任意の $p, q \in P$ に対して、次の性質をもつ M の局所的な変換 φ と、p の P における近傍 U が存在すると仮定しよう。即ち、$\rho \circ \varphi = \rho$、$\tilde{\varphi}(U) \subset P$ かつ $\tilde{\varphi}(p) = q$。このとき、P を N-transitive という。

はじめに帰って、$\mathcal{L}$ を M 上の CLAS としよう。$p \in F(M,N)$ $(\pi(p) = x)$ に対して、$T_p F(M,N)$ の部分空間 D_p を $D_p = \{ \tilde{X}_p \mid X \in \mathcal{L}_x \}$ と定義する。そうすると、$D = \bigcup D_p$ は完全積分可能な distribution になる。$\rho : M \longrightarrow N$ の断面 $\mathring{x}(t)$ $(t \in N)$、及び $\rho \circ \pi : F(M,N) \longrightarrow N$ の断面 $\mathring{p}(t)$ を、$\pi(\mathring{p}(t)) = \mathring{x}(t)$ となるように選ぶ。以下の議論は全く局所的だから、M, N を適当な開集合でとり替る事によって、そのような断面が存在すると仮定する。$\mathring{p}(t)$ を通る D の積分多様体を $\mathscr{I}_{\mathring{p}(t)}$ で表わそう。$\bigcup_t \mathscr{I}_{\mathring{p}(t)}$ は一般には多様体でないので、$\mathscr{I}_{\mathring{p}(t)}$ において $\mathring{p}(t)$ の十分小さな近傍をとり、それらの和集合を P とする。近傍を十分小にとれば、P は多様体であると思ってよい。次の定理は容易に分る。

定理1　PはN-transitiveな$\mathcal{G}$-structureである。

M上のベクトル場Xは、$\tilde{X}$がPに接する時、Pの無限小自己同型といわれる。Pの無限小自己同型からなるLASを$\mathcal{L}(P)$で表わすと、Pの定義から、$\mathcal{L}\subset\mathcal{L}(P)$である。したがって、$\mathcal{L}$をPにもち上る事によって、P上にCLAS $\mathcal{L}^{(1)}$ができる。$\mathcal{L}^{(1)}$に対して上と同じ事をしてやると、ある$\mathcal{G}_1$と、$\mathcal{G}_1$-structure P_1が存在して、$\mathcal{L}\subset\mathcal{L}(P_1)$となる。以下同様にして、一般にbundleの列

$$M\longleftarrow P\longleftarrow P_1\longleftarrow P_2\longleftarrow\cdots$$

ができるが、定義1の(3)を使うと、ℓが存在して$\mathcal{L}=\mathcal{L}(P_\ell)$であることが、推移的な場合と同様にして証明できる。詳細は省略する。

§2.　$\rho: M\longrightarrow N$をfibered manifold. $P\subset F(M,N)$をN-transitiveな$\mathcal{G}$-structureとする。以下で、Pのstructure functionを定義する。まず、$p\in P$ $(\rho(\pi(p))=t)$のとき、$\tilde{\rho}_t: V\longrightarrow T_tN$を、$\tilde{\rho}_t(v)=\rho_* p(v)$で定義すると、N-transitiveという仮定から、$\tilde{\rho}_t$はpのとり方によらない。次に、θをF(M)の基本形式としよう。即ち、θはF(M)上のVに値をもつ1-formで、次式で定義

される： $\theta_p(X) = p^{-1}(\pi_* X)$，$X \in T_pF(M)$。$\theta$ の P への制限も同じ記号で表す。$p \in P$ に対して、T_pP の部分空間 H を、$\theta : H \longrightarrow V$ が bijective であるように選ぶ。したがって、$v \in V$ に対して、$\theta(v_H) = v$ となるような $v_H \in H$ が唯一つ存在する。この時、$c_H \in V \otimes \wedge^2 V^*$ を、$c_H(v, w) = d\theta(v_H, w_H)$ と定義しよう。$V\otimes\wedge^2V^* / \delta(\mathfrak{g}(t)\otimes V^*)$ における c_H の類 $c(p) = [c_H]$ は、H のとり方によらない。ここで、$t = \rho(\pi(p))$。また δ の定義については [4] 参照。$\tilde{\rho}$ 及び c を、それぞれ P の才一種、才二種 structure function と呼ぶ。(cf. [6])

$p, q \in P$ で $\rho(\pi(p)) = \rho(\pi(q))$ であれば、N-transitive という仮定から、$c(p) = c(q)$ が成り立つ事も容易に分る。$t \in N$ のとき、$(\rho\circ\pi)^{-1}(t)$ 上の共通の値を $c(t)$ で表す。

次に、構造方程式を示すために少し準備する。まず、$\mathfrak{g}$ は Lie 環の変形だから、その無限小変形を次の様に定義することができる。$A \in \mathfrak{g}(t)$ に対して、$\mathfrak{g}$ の断面 σ で $\sigma(t) = A$ となるものをとる。$v \in V$ の時、$\tau_v : \mathfrak{g}(t) \longrightarrow W\otimes V^* / \mathfrak{g}(t)$ を

$$\tau_v(A) \equiv \tilde{\rho}_t(v)\sigma \quad \mod \mathfrak{g}(t)$$

で定義しよう。右辺は、σ を $W\otimes V^*$ に値をもつ N 上の函数とみて、それにベクトル $\tilde{\rho}_t(v) \in T_tN$ を作用させる事を意味している。上の式が σ のとり方によらない事も、容易に確めることができる。また、τ_v は cocycle である。

$\left([\tau_v] \in H^1\left(\mathfrak{g}(t), {}^{W\otimes V^*}\!/\!_{\mathfrak{g}(t)}\right)\right)$　$A \in \mathfrak{g}(t)$ のとき、

$\tau(A) \in {}^{W\otimes V^*}\!/\!_{\mathfrak{g}(t)} \otimes V^*$ を、$\tau(A)(v) = \tau_v(A)$ で定義する。$\delta\tau(A)$ は、${}^{W\otimes \Lambda^2 V^*}\!/\!_{\delta(\mathfrak{g}(t)\otimes V^*)}$ の元として意味をもっている。

前に注意したように、c は ${}^{V\otimes \Lambda^2 V^*}\!/\!_{\delta(\mathfrak{g}\otimes V^*)}$ に値をもつ N 上の函数であるが、これは一般には vector bundle ではない。(ここで V, V^* などは N 上の自明な vector bundle とみなしている。) しかし、$V\otimes\Lambda^2 V^*$ に値をもつ N 上の函数 $\underline{c}$ で、各 t に対し、$\underline{c}(t) \in c(t)$ となるようなものは存在する。$\underline{c}$ に対して、$V\otimes\Lambda^2 V^* \otimes V^*$ に値をもつ函数 $\underline{\gamma}$ を、$\underline{\gamma}(v) = \tilde{\rho}(v)\underline{c}$　で定義しよう。自然な写像 $V\otimes\Lambda^2 V^*\otimes V^* \longrightarrow V\otimes\Lambda^3 V^*$ による $\underline{\gamma}$ の像を $\hat{\underline{\gamma}}$ とする。

$\mathfrak{g}(t)$ の ${}^{V\otimes \Lambda^2 V^*}\!/\!_{\delta(\mathfrak{g}(t)\otimes V^*)}$ 上への自然な表現を $\circ$ で表わす。また、$\underline{c} \in V\otimes\Lambda^2 V^*$ に対し、$\sigma(\underline{c}) \in V\otimes\Lambda^3 V^*$ を

$$\sigma(\underline{c})(v_1, v_2, v_3) = \mathfrak{S}\, \underline{c}(\underline{c}(v_1, v_2), v_3)$$

で定義する。ここで、$v_i \in V$、$\mathfrak{S}$ は v_i に関する symmetric sum を意味する。

次の定理を得る。

<u>定理2</u>（構造方程式）

(1)　$A \in \mathfrak{g}(t)$ のとき、$A\circ c(t) + \delta\tau(A) = 0$。

(2)　$\sigma(\underline{c}(t)) + \hat{\underline{\gamma}}(t) \in \delta(\mathfrak{g}(t)\otimes\Lambda^2 V^*)$。

推移的な場合には　$\tau = \hat{\underline{\gamma}} = 0$　だから、上式は[4]の構造

方程式に帰着する。

§3 $\mathcal{L}$をM上のCLAS、$\rho: M \longrightarrow N$を定義1における fibered manifold とする。$\mathcal{L}$の断面は各 fiber $\rho^{-1}(t)$ に接しているから、$\mathcal{L}$は$\rho^{-1}(t)$上に推移的LASを誘導する。それを$\mathcal{L}(t)$で表わそう。この節では、ある$o \in N$が存在して、$\mathcal{A} = \mathcal{L}(o)$が単純な時に、$\mathcal{L}$を決定する問題を考える。本質的には、さらに次のように仮定する事ができる：$\mathcal{A}$は、無限次元の時は primitive，有限次元の時は simply transitive。すると、局所的には、$\mathcal{A}$は次のうちのいずれかである。

① $\mathcal{L}_{gl(W,\mathbb{R})}$　全てのベクトル場からなるCLAS。

② $\mathcal{L}_{sl(W,\mathbb{R})}$　体積を不変にするベクトル場からなるCLAS。

③ $\mathcal{L}_{sp(W,\mathbb{R})}$　Hamiltonian 構造を不変にするベクトル場からなるCLAS。

④ $\mathcal{L}_{contact(\mathbb{R})}$　contact 構造を不変にするベクトル場からなるCLAS。

⑤ 有限次元単純リー群上の右不変ベクトル場からなるCLAS。

$\mathbb{C}$上で考えると、①～⑤に対応して次のものが我々の仮定をみたす。

⑥ $\mathcal{L}_{gl(W,\mathbb{C})}$ ⑦ $\mathcal{L}_{sl(W,\mathbb{C})}$ ⑧ $\mathcal{L}_{sp(W,\mathbb{C})}$ ⑨ $\mathcal{L}_{contact}(\mathbb{C})$

⑩ 複素単純リー群上の右不変ベクトル場からなるCLAS。⑥〜⑩は$\mathbb{R}$上で考えても単純である。以下では、全て$\mathbb{R}$上で考えることにする。

一般に、F, Nを多様体、$\mathcal{A}$をF上の推移的CLASとする。Xを、F×N上のベクトル場で、fibered manifold F×N ⟶ Nの各fiberに接しているようなものとする。さらに、Xを各fiberに制限したものは$\mathcal{A}$の断面であると仮定しよう。そのようなベクトル場XからなるLASを$\mathcal{A}[N]$で表わすと、$\mathcal{A}[N]$は定義1を満しcontinuousである。次に、Fを複素多様体、$\mathcal{A}$をF上の推移的な複素解析的LASとする。Nを実解析多様体、(D, I)をN上の実解析的pseudo-complex structureとする。(DはTNのsubbundle、$I \in \Gamma(D \otimes D^*)$はD上の複素構造である。詳しくは[5]とそこの文献を参照。) Fを実多様体、$\mathcal{A}$を$\mathbb{R}$上のCLASとみて、F[N]を考えることができる。ただし、ここでは実解析的な範囲で考える。F[N]の断面で、さらにpseudo-complex structure (D, I)に関して正則であるようなものからなるF[N]のsubsheafをF[N; D, I]で表わすと、これはやはりcontinuousである。

はじめに帰って、$\mathcal{L}$をM上のCLAS、$o \in$ Nに対し、

$\mathcal{A}=\mathcal{L}(\theta)$ とする。$P\subset F(M,N)$ を $\mathcal{L}$ に付随する $\mathfrak{g}$-structure、$\mathfrak{f}(t)=\mathfrak{g}(t)|_W\subset\mathfrak{gl}(W)$ とおく。($\mathfrak{g}(t)\subset W\otimes V^*$ に注意)
射影 $\mathfrak{g}(t)\longrightarrow\mathfrak{f}(t)$ の kernel を $\sigma(t)$ とする。W の V における補空間 U をとれば、$\sigma(t)$ は $W\otimes U^*$ の部分空間である。

$$V_1=\{v\in V\mid A(v)=0,\ A\in\sigma(\theta)\}$$

とおこう。次の条件を仮定する。

(C.1)　$\dim\mathfrak{f}(t)=\text{constant}$

(C.2)　$V_1=W$

この時、次の定理を得る。

<u>定理3</u>　(C.1) と (C.2) が成立つとする。$\mathcal{A}$ が①～⑤のいずれかであれば、$\mathcal{L}$ は $\mathcal{A}[N]$ に局所同型である。

<u>定理4</u>　(C.1), (C.2)、さらに実解析性を仮定する。その時 $\mathcal{A}$ が⑥～⑩のいずれかならば、N 上に pseudo-complex structure (D, I) が存在して、$\mathcal{L}$ は $\mathcal{A}[N;D,I]$ に局所同型である。

(注意)　条件(C.1)は、今の場合自動的に満されるかも知れない。また、(C.2) が成り立たない時は、$\mathcal{L}$ を reduction する必要がある。①～④或いは⑤～⑨のときはそれがうまくできるので、それらに対しては本質的には (C.2) は必要ない。

以下で、$\mathcal{A}=\mathcal{L}_{\mathfrak{sl}(W,\mathbb{R})}$ である場合の証明の概略を述べる。まず、(C.1) によって、$\mathfrak{f}(t)$ は $\mathfrak{f}=\mathfrak{sl}(W,\mathbb{R})$ の変形である

が、$\mathfrak{g}$ は rigid だから、適当なPの conjugate bundle をとる事によって、$\mathfrak{g}(t)=\mathfrak{g}$ であると思ってよい。次に、$\mathfrak{g}$ は $W\otimes U^*$ に自然に作用するけれど、$\mathfrak{a}(t)$ はその作用で不変になっている。したがって、Morimoto の結果と (C.2) から $\mathfrak{a}(t)=W\otimes U^*$ となる。ゆえ、$\mathfrak{g}(t)=\mathfrak{g}+W\otimes U^*$ である。$\mathfrak{g}(t)=\mathfrak{sl}(W,\mathbb{R})$ ということから、各 fiber $\bar{p}^{\prime}(t)$ 上には体積要素が与えられている訳だが、$\mathfrak{a}=W\otimes U^*$ という事は、Pの定義する構造が、パラメーター N 方向に関しては何の制限もつけていないという事を意味しているから、結局 $\mathcal{A}(P)$ は $\mathcal{A}[N]$ と局所同型である。$\mathcal{L}=\mathcal{L}(P)$ は、$\mathfrak{g}$ の prolongation に関する計算から得られる。

$\mathcal{A}=\mathcal{L}_{\mathrm{contact}(\mathbb{R})}$ の時は、contact algebra が rigid でないから少し複雑になる。

次に、定理4で $\mathcal{A}=\mathcal{L}_{\mathfrak{sl}(W,\mathbb{C})}$ の時の証明の概略を述べる。$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(W,\mathbb{C})$ は rigid だから、$\mathfrak{g}(t)=\mathfrak{g}$ と思ってよい。また、$\mathfrak{a}(t)$ は、$\mathfrak{g}$ で不変という事から、conjugate を除いて次のようなものになる。U の部分空間 U_1 と U_1 上の複素構造 I が存在して、

$$\mathfrak{a}(t)=\{A\in W\otimes U^* \mid J(A(u))=A(I(u)),\ u\in U_1\}$$

ここで、J は W の複素構造である。

$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{a}$ が与えられた時、列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{f} \longrightarrow 0$$

が exact になるような $\mathfrak{g}$ を決定する事は Lie 環の extension の問題だが、今の場合、$\mathfrak{g}$ は $H^1(\mathfrak{f}, W\otimes U^*/\mathfrak{a})$ の元と1対1に対応している。$H^1(\mathfrak{f}, W\otimes U^*/\mathfrak{a})=0$ だから、結局 $\mathfrak{g}=\mathfrak{f}+\mathfrak{a}$ である。

$\mathfrak{L}$ と $\mathcal{A}[N;D,I]$ が局所的に同型である事を示すには、P の structure function を決定する必要がある。まず次の分解に注意する。

$$V\otimes\Lambda^2V^*/\delta(\mathfrak{g}\otimes V^*) = V\otimes\Lambda^2W^*/\delta(\mathfrak{f}\otimes W^*) + V\otimes W^*\otimes U^*/\delta(\mathfrak{f}\otimes U^*+\mathfrak{a}\otimes W^*)$$
$$+ W\otimes\Lambda^2U^*/\delta(\mathfrak{a}\otimes U^*) + U\otimes\Lambda^2U^*$$

上の分解に対応して $c=c_1+c_2+c_3+c_4$ とする。$c_1(t)$ は $\mathfrak{L}(t)$ の structure function で、$\mathfrak{f}$ で不変だから今の場合 0 に等しい。c_4 については、一般に次が成り立つ: $u, u'\in U$ の時、$\tilde{p}(\underline{c}(u,u'))=-[\tilde{p}(u),\tilde{p}(u')]$。

$W^{\pm}=\{w\in W^{\mathbb{C}} \mid Jw=\pm\sqrt{-1}\,w\}$、同様にして $U_1^{\pm}\subset U_1^{\mathbb{C}}$ を定義しよう。c が構造方程式をみたすことから、次の補題を得る。

<u>補題</u>　(1) $c_3=0$

(2) c_2 の代表 $\underline{c}_2$ が存在して、$w\in W^+$, $u\in U_1^+$ のとき

$$\underline{c}_2(w,u)=0\ ,\quad \underline{c}_2(w,\bar{u})=\varphi(\bar{u})\,w$$

ここで、φ は $(U_1^-)^*$ に値をもつ N 上の函数。

TN の subbundle D と $I\in\Gamma(D\otimes D^*)$ を、$D_t=\{\tilde{p}_t(u) \mid u\in U_1\}$ $I(\tilde{p}(u))=\tilde{p}(Iu)$ で定義しよう。$S=\{X\in D^{\mathbb{C}} \mid IX=\sqrt{-1}\,X\}$ と

おく。(D, I) が pseudo-complex structure であることをいうには、次を証明すればよい。

$X, Y \in \Gamma(S)$ ならば、$[X, Y] \in \Gamma(S)$。

容易に分るように、これは次に同値である：$u, u' \in U_1^+$ ならば $\underline{c}(u, u')$ の U 成分は U_1^+ に含まれる。$A \in \mathfrak{a}$、$\underline{c}$ を、$\underline{c}_3 = 0$ で $\underline{c}_2$ が補題を満たす様にとる。定理2から、$T \in \mathfrak{g} \otimes V^*$ が存在して、$u, u' \in U_1^+$ の時

$$(A \circ \underline{c})(u, u') = A\underline{c}(u, u') = (\delta T)(u, u')。$$

右辺 $\in W^+$ だから、$\underline{c}(u, u') \in U_1^+$。故、$(D, I)$ は pseudo-complex structure である。

φ に対して、$\tilde{\varphi} \in \Gamma(\bar{S}^*)$ を、$\tilde{\varphi}(\tilde{p}(\bar{u})) = \varphi(\bar{u})$ $(u, \in U_1^+)$ と定める。N上には、$\bar{\partial}_N : \Lambda^r \bar{S}^* \longrightarrow \Lambda^{r+1} \bar{S}^*$ が複素多様体の場合と同様にして定義される事に注意する。勿論 $\bar{\partial}_N \circ \bar{\partial}_N = 0$。この時、構造方程式から次の補題が成り立つ。

<u>補題</u>　$\bar{\partial}_N \tilde{\varphi} = 0$

φ は c_2 の essential な部分と考えられるが、一般に0ではない。ところで、$\mathcal{L}$ が与えられた時、$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}$-structure P は conjugate を除いてしか決まらないが、structure function は P によって値が違ってくる。$\mathcal{A}[N; D, I]$ の方の structure function を調べると、bundle のとり方にはよるけれども、その標準的な bundle P° の structure function c° は、

$c_1^0 = c_2^0 = c_3^0 = 0$ である事が容易に分る。したがって、$\mathcal{L}$と$\mathcal{A}[N;D,J]$が同型である事をいうには、Pのconjugate bundle P'を、$c_2'=0$が成り立つ様にとれる、ことを示さなければならない。これは上の補題から示す事ができる。即ち、実解析性を仮定しているから、$\bar{\partial}_N f = \tilde{\varphi}$となるような$\mathbb{C}$-valuedの函数$f$が存在する。$f=f_1+\sqrt{-1}\,f_2$として、$GL(V,W)$-valuedの函数$a$を、

$$a = \begin{pmatrix} e^{f_1 id + f_2 J} & 0 \\ 0 & id \end{pmatrix}$$

と定義する。すると、$P'=R_a P$に対しては、$c_2'=0$である。c'の他の成分はc^0と等しいので、Tanakaによって証明された$\mathfrak{g}$-structureの同型定理 (cf. [6]) を使うと、P'とP^0は同型である事が結論できる。ゆえに、$\mathcal{L}(P')$と$\mathcal{A}[N;D,J]$は同型である。$\mathcal{L}=\mathcal{L}(P')$は、$\mathfrak{g}$のprolongationに関する計算から得られる。

最後に、$\mathcal{L}$のformal algebraについて注意を述べる。点$x\in M$における$\mathcal{L}$のformal algebraをLとしよう。適当な同一視のもとで、Lは$D(V,W)=W+W\otimes V^*+W\otimes S^2V^*+\cdots$のsubalgebraである。$D(V)=V+V\otimes V^*+\cdots$, $\mathfrak{g}=L_0/L_1$とする。ここで、$\{L_k\}_{k\geq -1}$はLの自然なfiltration。写像$V\ni v\longrightarrow \underline{v}\in D(V)$を、$w\in W$に対しては$\underline{w}\in L$であるように選ぶ。同様に、$\mathfrak{g}\ni A\longrightarrow \underline{A}\in L$とする。$v\in V$の時、

$\underline{\tau}_v : \mathfrak{g} \longrightarrow V\otimes V^*$ を

$$\underline{\tau}_v(A) = ([\underline{v}, \underline{A}] - \underline{Av}) \text{ の } V\otimes V^* \text{ の項}$$

と定義しよう。すると、これから導かれる $\tau_v : \mathfrak{g} \longrightarrow V\otimes V^*/\mathfrak{g}$ は cocycle であって、cohomology class $[\tau_v] \in H^1(\mathfrak{g}, V\otimes V^*/\mathfrak{g})$ は、Lだけから定まる事が容易に分る。また、これは§2で定義したものと同じものである事も証明できる。同様にして、cの微分δもLを使って定義できるが、省略する。

文献

[1] E. Cartan, Les groupes de transformations continus, infinis, simple, Ann. Ec. Norm. Sup. 26 (1909), 93-161

[2] K. Kiso, Local properties of intransitive infinite Lie algebra sheaves, (To appear)

[3] T. Morimoto, On the intransitive Lie algebras whose transitive parts are infinite and primitive, (To appear)

[4] I.M. Singer - S. Sternberg, On the infinite group of Lie and Cartan, J. Analyse Math. 15 (1965), 1-114

[5] N. Tanaka, On non-degenerate real hypersurface, graded Lie algebras and Cartan connections, Japan J. Math. 2 (1976), 131-190

[6] K. Ueno, A study on the equivalence of generalized G-structures, 京大修士論文, 1968